

A 3D surface plot of a function, likely a polynomial, showing a central peak and surrounding valleys. The surface is rendered with a grid of lines and is colored with a gradient from blue at the base to red at the peak. The plot is set within a 3D coordinate system with dashed grid lines. The x and y axes range from approximately -8 to 2, and the z-axis ranges from -8 to 8. The text "Cálculo Numérico" is overlaid in the center of the plot.

Cálculo Numérico

Zeros de funções reais

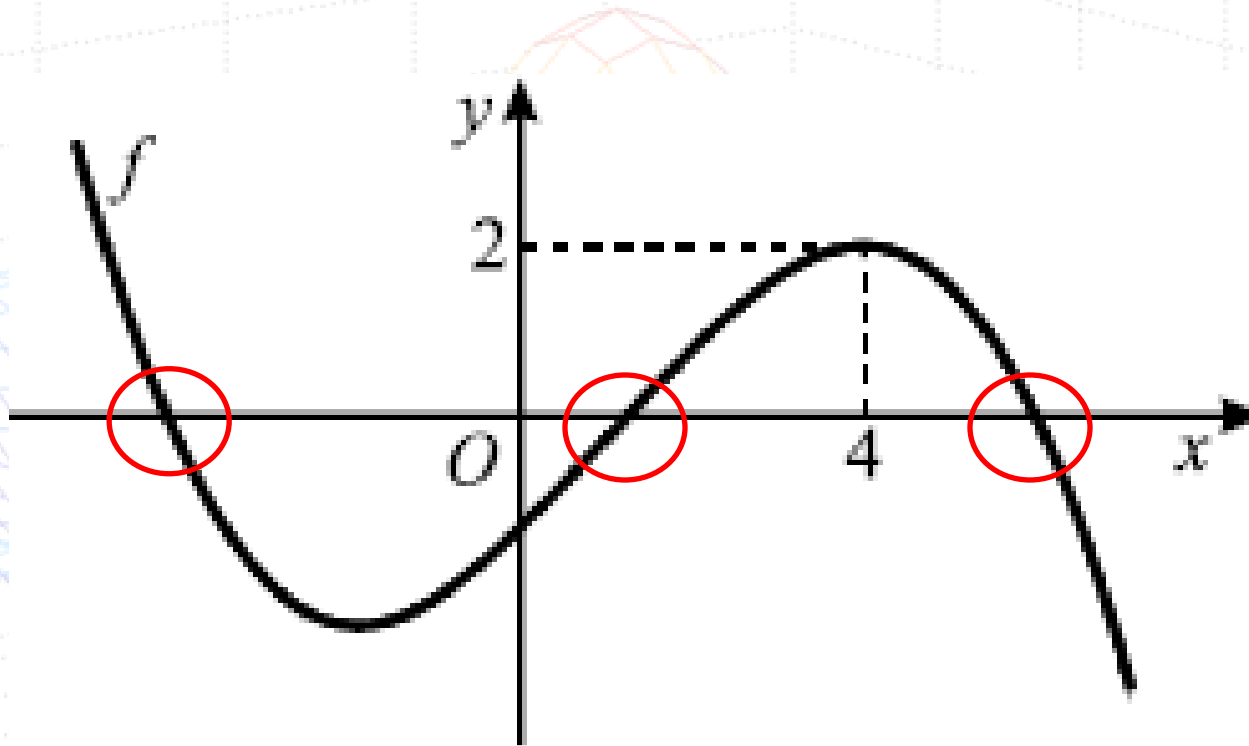
Agenda

- Introdução
- Isolamento de raízes
- Refinamento
- Bisseccção
- Posição Falsa
- Método do ponto fixo (MPF)
- Método de Newton-Raphson
- Método da secante

Introdução

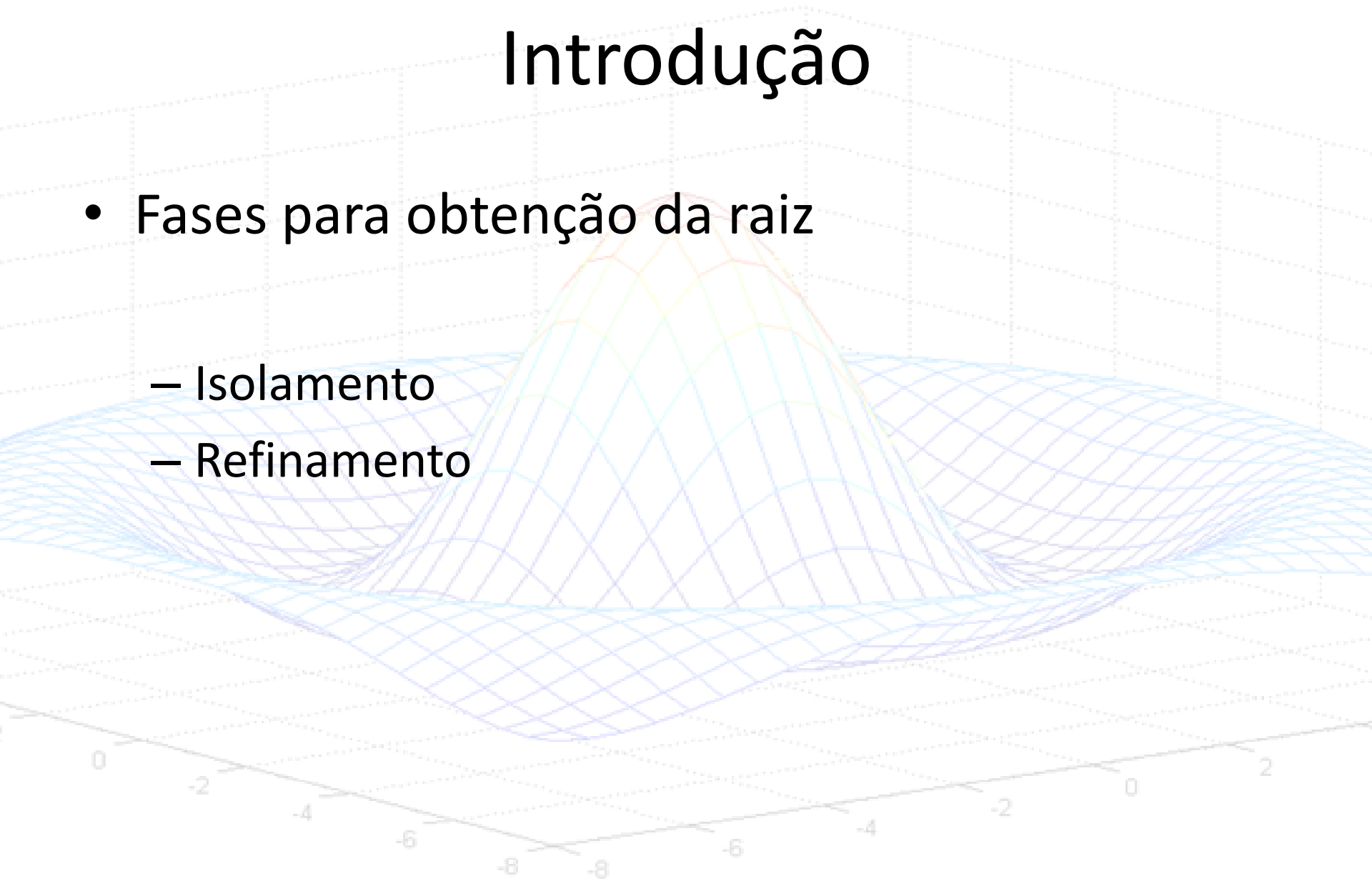
- Um número real ξ é um zero da função $f(x)$ ou uma raiz da equação $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$
- Os valores de x que anulam $f(x)$ podem ser reais ou complexos
- Os zeros de função são representados pelas abscissa dos pontos onde uma curva intercepta o eixo X

Introdução



Introdução

- Fases para obtenção da raiz
 - Isolamento
 - Refinamento



Isolamento de raízes

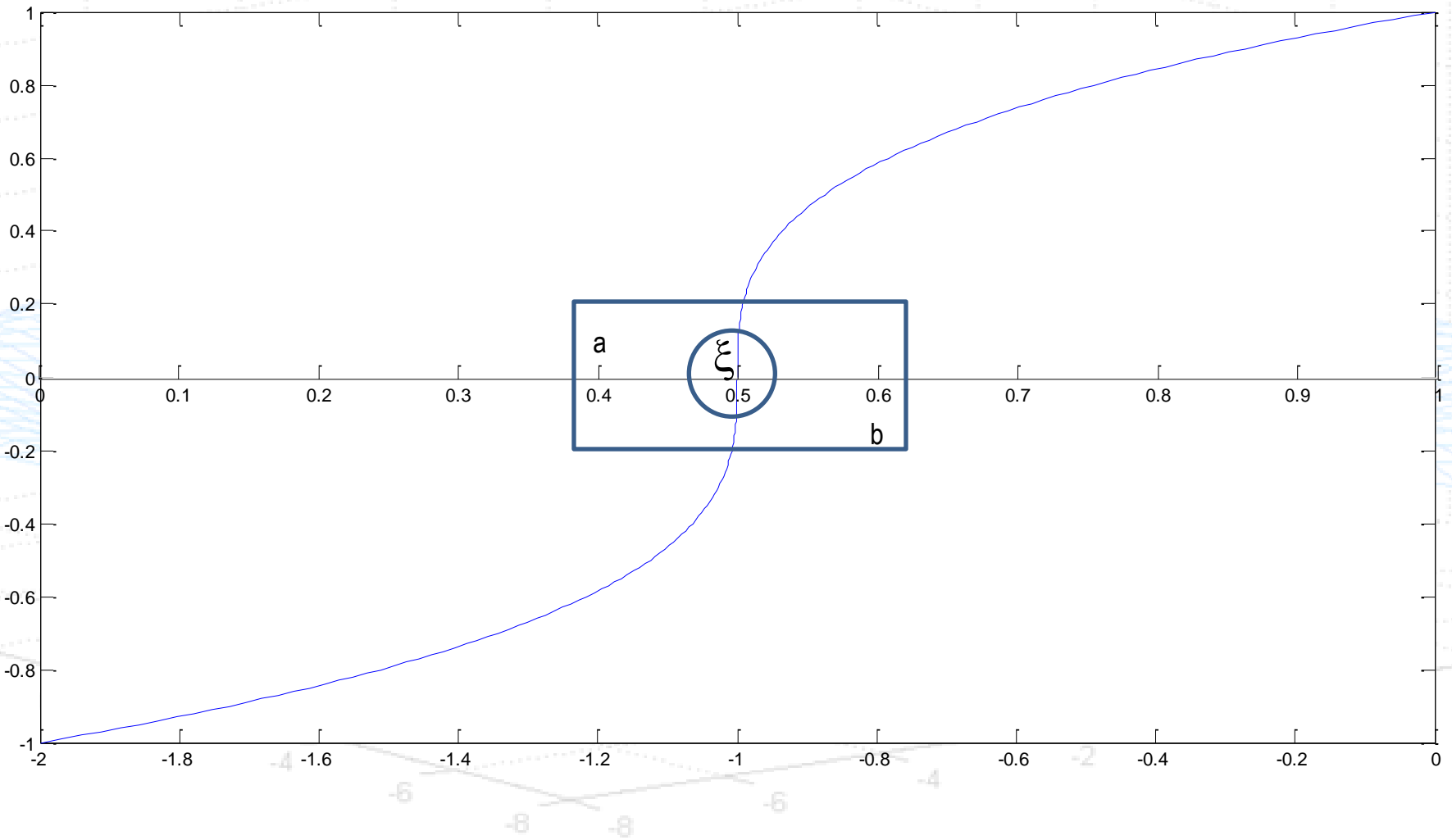
- Teorema 1

“Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a,b]$. Se $f(a).f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x=\xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$.”

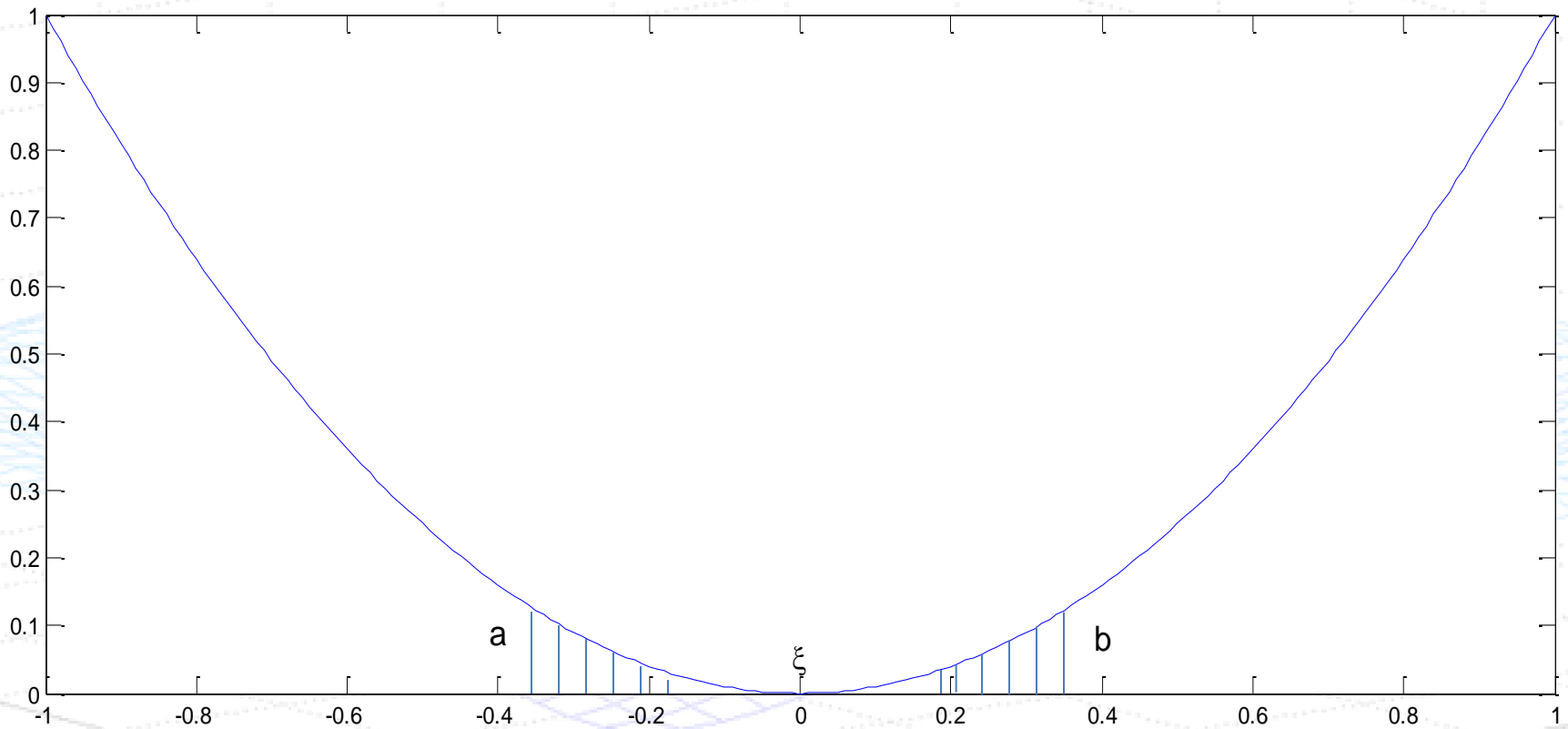
Sob a hipótese do teorema:

“Se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em (a,b) , então este intervalo contém um único zero de $f(x)$ ”

Isolamento de raízes

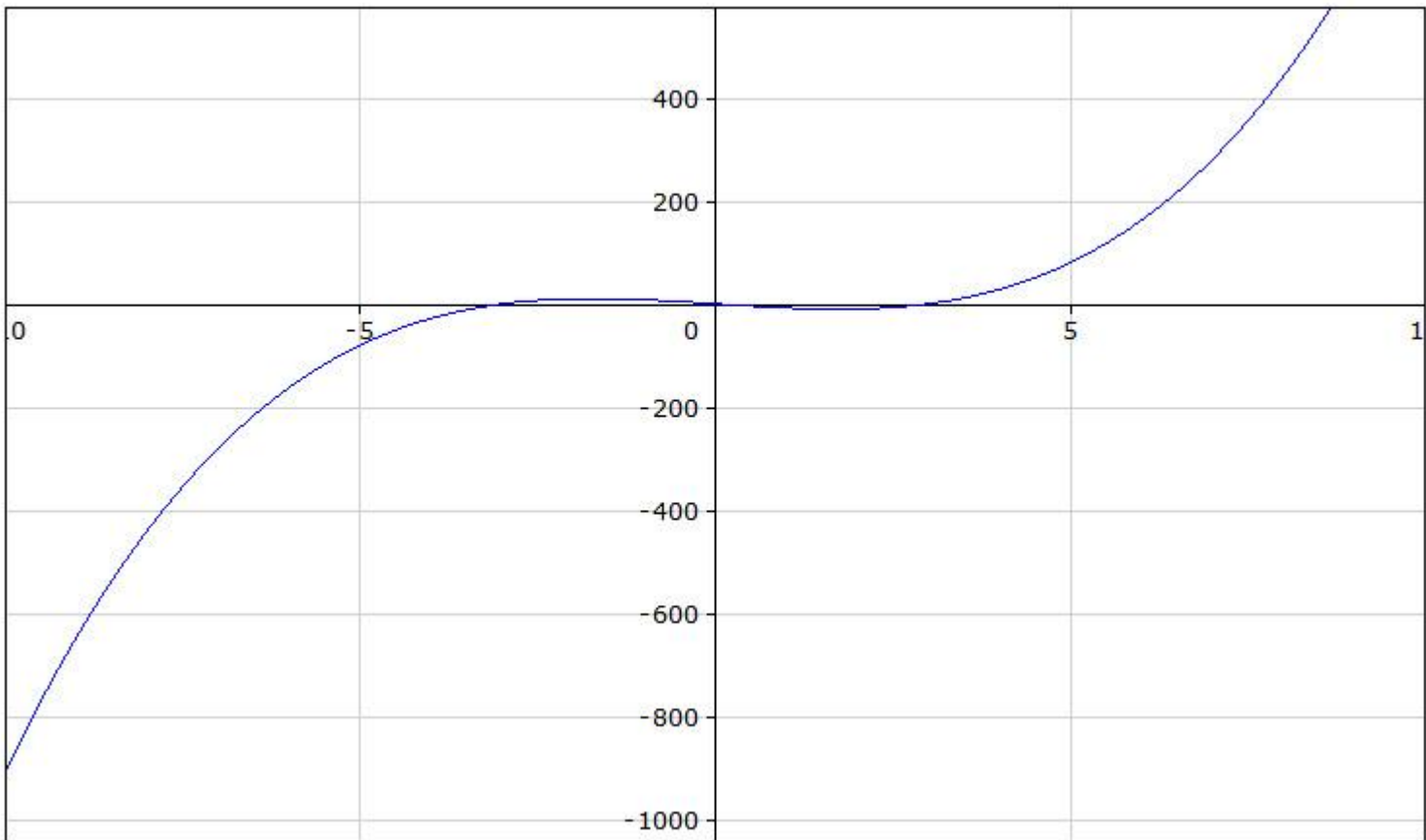


Isolamento de raízes



Isolamento de raízes

- Seja: $f(x) = x^3 - 9x + 3$



Isolamento de raízes

- Analisando os valores e mudança de sinal

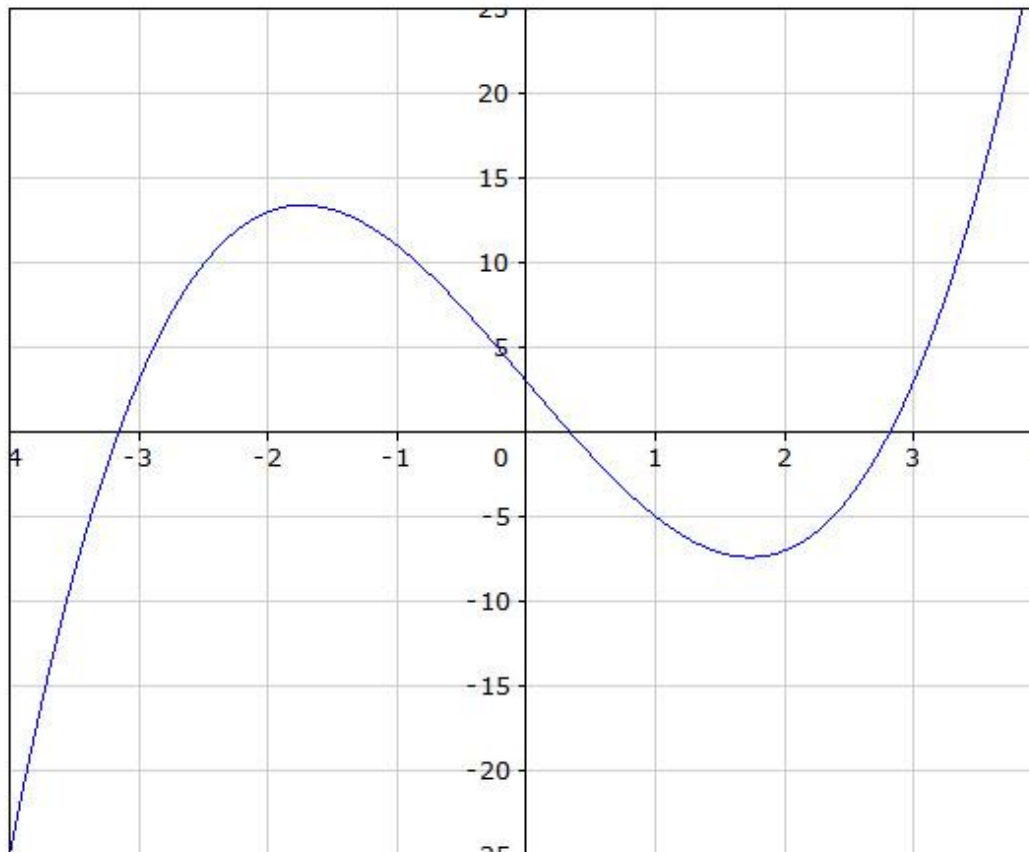
x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

Isolamento de raízes

- Processos de aproximação das raízes:
 - Esboçar o gráfico da função e localizar os pontos aonde a curva toca o eixo x , ou;
 - A partir de $f(x)=0$ obter $h(x)=g(x)$, esboçar os dois gráficos e localizar os pontos aonde se interceptam. Pois $f(\xi)=0 \iff g(\xi)=h(\xi)$, ou;
 - Utilização de softwares para traçar o gráfico da função.

Isolamento de raízes

- $f(x) = x^3 - 9x + 3$



$$\xi_1 \in (-4, -3)$$

$$\xi_2 \in (0, 1)$$

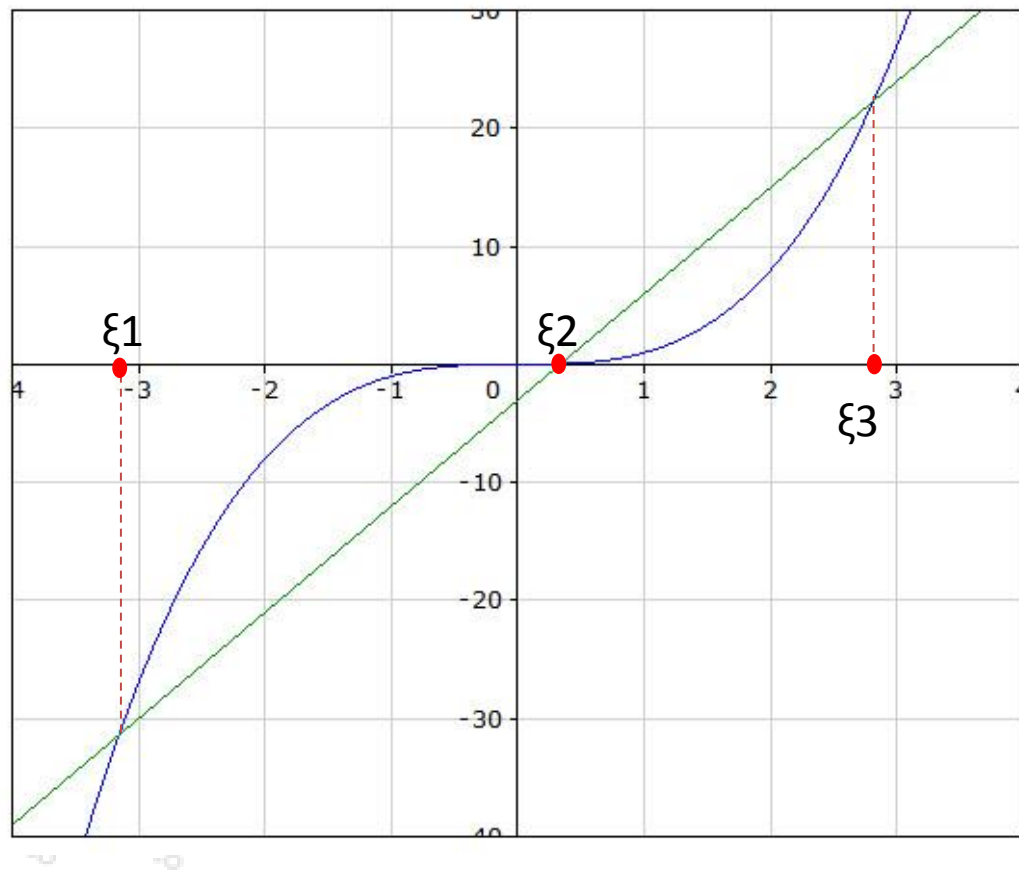
$$\xi_3 \in (2, 3)$$

Isolamento de raízes

- Escrevendo:

$$g(x) = x^3$$

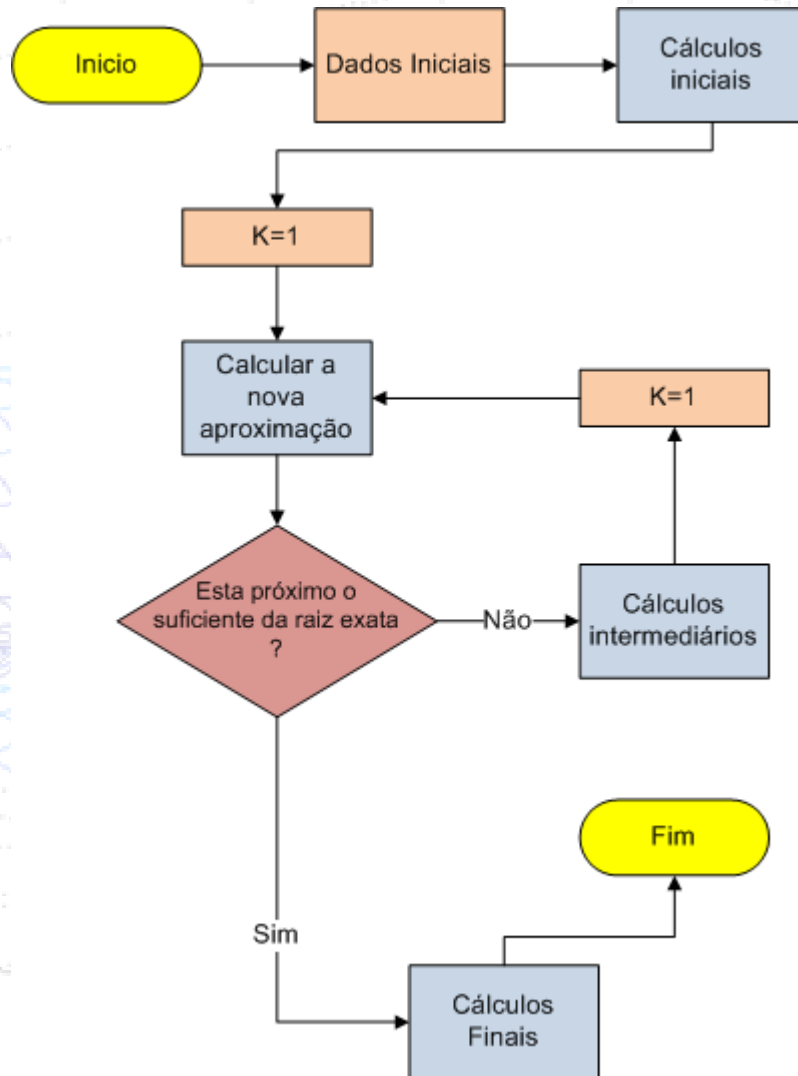
$$h(x) = 9x - 3$$



Refinamento

- Todos os métodos são da classe dos métodos iterativos
- Método iterativo – conjunto de instruções executadas passo a passo, podendo ser repetidas em ciclos
- Cada ciclo é chamado de iteração
- Estes métodos fornecem apenas uma aproximação para a solução exata

Refinamento



Refinamento

- Critérios de parada
 - Quando parar o algoritmo ???
 - X_k está suficientemente próximo da raiz???

\bar{x} é a raiz aproximada com precisão ε se:

$$i) \quad \left| \bar{x} - \xi \right| < \varepsilon$$

ou

$$ii) \quad \left| f(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

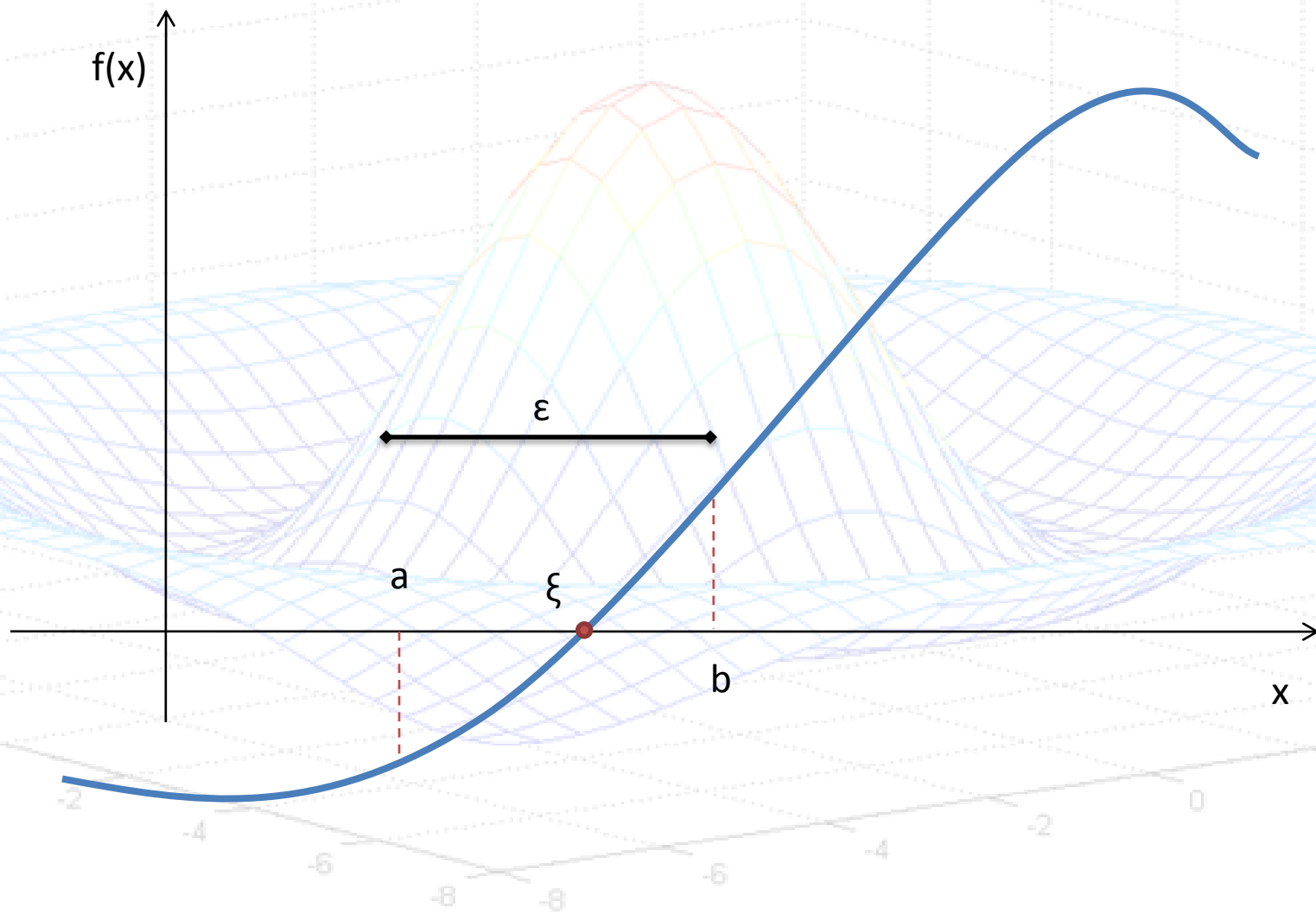
Refinamento

- Como ξ não é conhecida, temos que a cada iteração reduzir o intervalo que contém a raiz, tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \xi \in (a, b) \\ e \\ b - a < \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \forall x \in [a, b], |x - \xi| < \varepsilon.$$

Portanto, $\forall x \in [a, b]$ pode ser tomado como \bar{x}

Refinamento



Bisseccção

- A função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$
- O objetivo é reduzir o intervalo de tal forma que $(b-a) < \epsilon$
- Este método reduz o intervalo dividindo-o ao meio sucessivamente

Bisseccção

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = x_1 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \begin{cases} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = x_1 \end{cases}$$

⋮

Bisseccção

Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$

1) Dados Iniciais:

a) Intervalo inicial $[a,b]$

b) Precisão ϵ

2) Se $(b-a) < \epsilon$, então escolha para x aproximado qualquer x em $[a,b]$. FIM

3) $K = 1$

4) $M = f(a)$

5) $x = (a + b) / 2$

6) Se $Mf(x) > 0$, faça $a = x$. Vá para o passo 8

7) $b = x$

8) Se $(b-a) < \epsilon$, escolha para x aproximado qualquer x em $[a,b]$. FIM

9) $k = k + 1$. Volte para o passo 5.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

$$I = [0,1]$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

Bisseccção

A	M=f(A)	B	f(B)	X	f(X)	Erro
0,000000000	3,000000000	1,000000000	-5,000000000	0,500000000	-1,375000000	
0,000000000	3,000000000	0,500000000	-1,375000000	0,250000000	0,765625000	0,250000000
0,250000000	0,765625000	0,500000000	-1,375000000	0,375000000	-0,322265625	0,125000000
0,250000000	0,765625000	0,375000000	-0,322265625	0,312500000	0,218017578	0,062500000
0,312500000	0,218017578	0,375000000	-0,322265625	0,343750000	-0,053131104	0,031250000
0,312500000	0,218017578	0,343750000	-0,053131104	0,328125000	0,082202911	0,015625000
0,328125000	0,082202911	0,343750000	-0,053131104	0,335937500	0,014474392	0,007812500
0,335937500	0,014474392	0,343750000	-0,053131104	0,339843750	-0,019343913	0,003906250
0,335937500	0,014474392	0,339843750	-0,019343913	0,337890625	-0,002438627	0,001953125
0,335937500	0,014474392	0,337890625	-0,002438627	0,336914063	0,006016918	0,000976563

Bisseccção

- Convergência

“Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a)f(b)<0$, o método da bissecção vai gerar uma sequência $\{x_k\}$ que converge para a raiz.”

Bisseccção

- Estimativa do número de iterações

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Posição Falsa

- O método utiliza a média ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Posição Falsa

- 1) Dados iniciais
 - a) Intervalo inicial $[a,b]$
 - b) Precisões ε_1 e ε_2
- 2) Se $(b-a) < \varepsilon_1$ então escolha a raiz para qualquer x em $[a,b]$. FIM.
Se $|f(a)| < \varepsilon_2$ ou se $|f(b)| < \varepsilon_2 \rightarrow$ escolha a ou b como raiz e FIM.
- 3) $k = 1$
- 4) $M = f(a)$
- 5) $x = [af(b)-bf(a)]/[f(b)-f(a)]$
- 6) Se $|f(x)| < \varepsilon_2$, escolha x como raiz e FIM
- 7) Se $Mf(x) > 0$, faça $a=x$. Vá para o passo 9
- 8) $b = x$
- 9) Se $b-a < \varepsilon_1$, então escolha a raiz para qualquer x em $[a,b]$. FIM.
- 10) $k = k + 1$. Volte para o passo 5.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

$$I = [0, 1]$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$$

Posição Falsa

a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)	Erro	b-a
0,000000000	3,000000000	1,000000000	-5,000000000	0,375000000	-0,322265625		1,000000000
0,000000000	3,000000000	0,375000000	-0,322265625	0,338624339	-0,008790199	0,313475426	0,375000000
0,000000000	3,000000000	0,338624339	-0,008790199	0,337635046	-0,000225884	0,008564315	0,338624339
0,000000000	3,000000000	0,337635046	-0,000225884	0,337609625	-0,000005795	0,000220089	0,337635046

Posição Falsa

- Convergência

“Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$ com $f(a)f(b)<0$ então o método da posição falsa gera uma seqüência convergente”

MPF

- Consiste em transformar a equação $f(x)=0$ em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$
- A partir de uma aproximação inicial x_0 gerar uma seqüência de aproximações para ξ
- A função $\varphi(x)$ é tal que $f(\xi)=0$ se e somente se $\varphi(\xi)=\xi$
- O problema de encontrar zero de $f(x)$ é encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$

MPF

- Para $x^2 + x - 6 = 0$

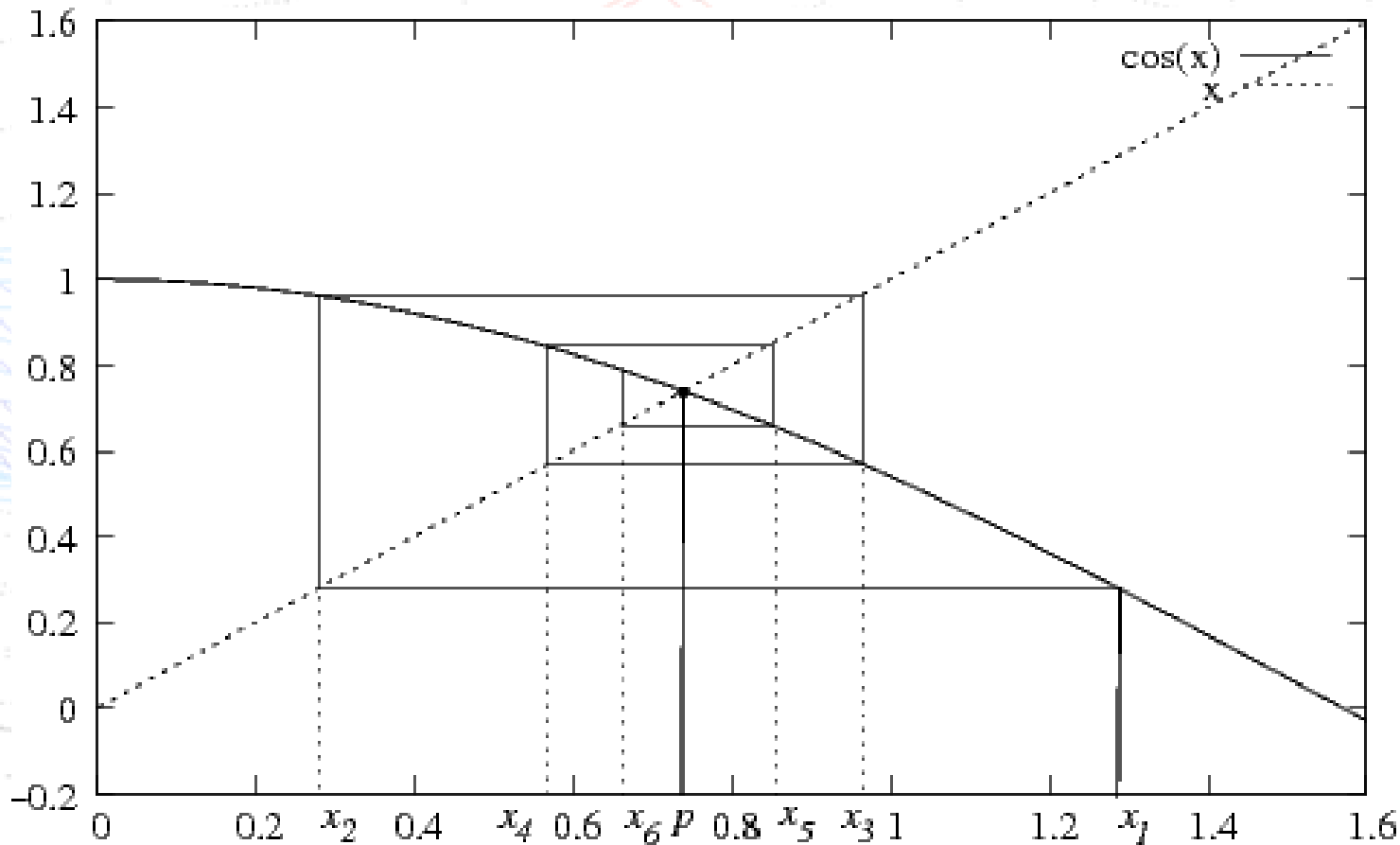
$$\varphi_1 = 6 - x^2$$

$$\varphi_2 = \pm \sqrt{6 - x}$$

$$\varphi_3 = \frac{6}{x} - 1$$

$$\varphi_4 = \frac{6}{x + 1}$$

MPF



MPF

- Nem todas $\varphi(x)$ geram uma seqüência convergente.
- Quais das duas geram uma sequênci convergente para a raiz $\xi = 2$ com $x_0 = 1.5$?

$$\varphi_1 = 6 - x^2$$

$$\varphi_2 = \sqrt{6 - x}$$

MPF

- Convergência

“Seja ξ uma raiz da equação $f(x)=0$, isolada num intervalo I centrado em ξ . Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x)=0$. Se:

- $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I
- $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, para qualquer x no intervalo I
- X_0 pertence ao intervalo I ”

MPF

- Algoritmo

- 1) Dados iniciais: x_0 aproximação inicial e ξ_1 e ξ_2 são as precisões
- 2) Se $|f(x_0)| < \xi_1$, faça $x = x_0$ e FIM
- 3) $k = 1$
- 4) $x_1 = \varphi(x_0)$
- 5) Se $|f(x_1)| < \xi_1$ ou se $|x_1 - x_0| < \xi_2$, então faça $x = x_1$ e FIM
- 6) $x_0 = x_1$
- 7) $k = k + 1$ e volte para o passo 4

MPF

- Exemplo

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}$$

$$x_0 = 0.5$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$$

$$\xi \in (0, 1)$$

MPF

- Encontre o zero de $f(x)$

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\varphi(x) = \frac{6}{x+1}$$

$$x_0 = 1.5$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$$

$$\xi \in (1.5, 2.5)$$

MPF

- Encontre o zero da $f(x)$

$$f(x) = e^x - 4x^2$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{x/2}}{2}$$

$$x_0 = 0.5$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$$

$$\xi \in (0, 1)$$

Método de Newton-Raphson

- Este método é um melhoramento do MPF
- É determinado uma $\varphi(x)$, que acelere a convergência do MPF, tal que $\varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Método de Newton-Raphson

- Escolhido x_0 , a sequência $\{x_k\}$ será determinada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método de Newton-Raphson

- Exemplo:

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$$

$$x_0 = 1.5$$

$$\xi = 2$$

k	X	f(x)	f'(x)	Phi(x)	Erro
0	1,5000	-2,2500	4,0000	2,0625	
1	2,0625	0,3164	5,1250	2,0008	0,061738
2	2,0008	0,0038	5,0015	2,0000	0,000762
3	2,0000	0,0000	5,0000	2,0000	1,16E-07

Método de Newton-Raphson

- O método irá convergir se $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ forem contínuas no intervalo I que contém a raiz de $f(x) = 0$.
- Em geral, afirma-se que o método de Newton converge desde que x_0 seja escolhido “suficientemente próximo” da raiz ξ .

Método de Newton-Raphson

- Exemplo

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$$

$$x_0 = 0$$

$$\xi = 2$$

k	X	f(x)	f'(x)	Phi(x)	Erro
0	0,0000	-6,0000	1,0000	6,0000	
1	6,0000	36,0000	13,0000	3,2308	2,769231
2	3,2308	7,6686	7,4615	2,2030	1,027756
3	2,2030	1,0563	5,4060	2,0076	0,19539
4	2,0076	0,0382	5,0152	2,0000	0,007612
5	2,0000	0,0001	5,0000	2,0000	1,16E-05

Método de Newton-Raphson

- Algoritmo

- 1) Dados iniciais: x_0 aproximação inicial e ξ_1 e ξ_2 são as precisões
- 2) Se $|f(x_0)| < \xi_1$, faça $x = x_0$ e FIM
- 3) $k = 1$
- 4) $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
- 5) Se $|f(x_1)| < \xi_1$ ou se $|x_1 - x_0| < \xi_2$, então faça $x = x_1$ e FIM
- 6) $x_0 = x_1$
- 7) $k = k + 1$ e volte para o passo 4

Método de Newton-Raphson

- Determine o zero de $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

$$x_0 = 0,5$$

$$\xi \in (0,1)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$$

k	X	f(x)	f'(x)	Phi(x)	Erro
0	0,5000	-1,3750	-7,5000	0,3167	
1	0,3167	0,1818	-8,0500	0,3392	0,022578
2	0,3392	-0,0142	-7,9823	0,3375	0,001774
3	0,3375	0,0012	-7,9876	0,3376	0,00015
4	0,3376	-0,0001	-7,9871	0,3376	1,26E-05

Método de Newton-Raphson

- Utilizando o método de Newton calcule a raiz quadrada de 3 com uma precisão de 10^{-5}

k	X	f(x)	f'(x)	Phi(x)	Erro
0	1,00000	-2,00000	2,00000	2,00000	
1	2,00000	1,00000	4,00000	1,75000	0,25
2	1,75000	0,06250	3,50000	1,73214	0,017857
3	1,73214	0,00032	3,46429	1,73205	9,2E-05
4	1,73205	0,00000	3,46410	1,73205	2,45E-09

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$\xi = 1,7320508076$$

Método da secante

- Uma grande desvantagem do método de Newton é cálculo da $f'(x)$
- Pode-se calcular $f'(x)$ pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Método da secante

- Assim $\varphi(x)$ é dada por:

$$\varphi(x_k) = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1})$$

Método da secante

- Exemplo

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$x_0 = 1,5$$

$$x_1 = 1,7$$

$$\xi = 2$$

k	X	f(x)
0	1,50000	-2,25
1	1,70000	-1,41
2	2,03571	0,179847
3	1,99774	-0,01131
4	1,99998	-8E-05
5	2,00000	3,63E-08

Método da secante

- Algoritmo

- 1) Dados iniciais: x_0 , x_1 aproximação inicial e ξ_1 e ξ_2 são as precisões
- 2) Se $|f(x_0)| < \xi_1$, faça $x = x_0$ e FIM
- 3) $k = 1$
- 4) $x_2 = x_1 - [f(x_1) / (f(x_1) - f(x_0))] * (x_1 - x_0)$
- 5) Se $|f(x_2)| < \xi_1$ ou se $|x_2 - x_1| < \xi_2$, então faça $x = x_1$ e FIM
- 6) $x_0 = x_1$ e $x_1 = x_2$
- 7) $k = k + 1$ e volte para o passo 4

Método da secante

- Determine o zero da $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$\xi \in (0, 1)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$$

k	X	f(x)	Erro(Xk - Xk-1)
0	0,00000	3,00000	
1	1,00000	-5,00000	1,00000
2	0,37500	-0,32227	0,62500
3	0,33194	0,04910	0,04306
4	0,33763	-0,00022	0,00569
5	0,33761	0,00000	0,00003